View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Universitas Bangka Belitung: Open Journal Systems

Penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4 dalam Analisis Rangkaian RLC

Rika Favoria Gusa
JurusanTeknik Elektro,Fakultas Teknik,Universitas Bangka Belitung
rika_favoria@yahoo.com

ABSTRACT

The existence of inductor and capacitor in RLC circuit without source, at least, creates system that has characteristic of second order differential equation. Differential equation can be solved using 4th order Runge-Kutta method. RLC circuits without source that have same configuration yet different elements value will give different responses. It makes RLC circuit analysis become difficult. The solving steps of the equation of RLC circuit without source that is a second order differential equation begun with making 2 first order differential equations based on the RLC circuit equation. The next step is typing solving steps using 4th order Runge-Kutta method based on 2 first order differential equationsin Matlab to get the natural response graphic of series RLC circuit and parallel RLC circuit in a short time. By solving the equation of series RLC circuit without source and parallel RLC circuit without source, known that the using of the 4th order Runge-Kutta method in RLC circuit analysis give results (natural response) with high accuracy compared with the exact values of natural response. For the parallel RLC circuit discussed, the highest error is 0,0023 (0,23%). For the series RLC circuit discussed, there is no error.

Keywords : RLC seri circuit, RLC paralel circuit, Runge-Kutta orde 4

INTISARI

Terdapatnya induktor dan kapasitor dalam rangkaian RLC tanpa sumber setidak-tidaknya menghasilkan sistem yang bercirikan sebuah persamaan diferensial orde kedua.Penyelesaian persamaan diferensial dapat dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Rangkaian-rangkaian RLC tanpa sumber yang mempunyai konfigurasi sama tetapi memiliki harga elemen yang berbeda akan menghasilkan tanggapan yang berbeda. Hal ini membuat analisis rangkaian RLC menjadi sukar. Langkah-langkah penyelesaian persamaan rangkaian RLC tanpa sumber yang merupakan persamaan diferensial orde kedua diawali dengan membuat dua persamaan diferensial orde pertama berdasarkan persamaan rangkaian RLC tersebut. Selanjutnya, dilakukan penyelesaian menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan bantuan program Matlab sehingga dapat diketahui jenis dan grafik tanggapan alami dari rangkaian RLC seri maupun rangkaian RLC paralel tersebutdalam waktu yang singkat. Dengan melakukan penyelesaian terhadap beberapa persamaan rangkaian RLC seri maupun rangkaian RLC paralel tanpa sumber, diperoleh bahwa penerapan metode Runge-Kutta orde 4 dapat memberikan hasil (nilai tanggapan alami) dengan tingkat ketelitian yang tinggi jika dibandingkan dengan nilai penyelesaian eksaknya. Untuk rangkaian RLC paralel tanpa sumber yang dibahas, selisih (*error*) terbesar bernilai 0,0023 (0,23%).Untuk rangkaian RLC seri tanpa sumber yang dibahas, tidak terdapat selisih (*error*) terhadap nilai eksaknya.

Kata kunci: Rangkaian RLC seri, Rangkaian RLC paralel, Runge-Kutta orde 4

I. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan di dunia nyata harus dimodelkan untuk dapat dianalisis dan ditentukan solusinya. Model yang dibuat menjadikan analisis masalah lebih mudah serta dapat menghemat waktu, biaya dan mengurangi resiko. Selain model fisik, terdapat model matematis yang dapat diselesaikan baik dengan analisis maupun simulasi [1]. Model matematis umumnya mengandung persamaan diferensial yang derajat kesulitannya meningkat sebanding dengan kompleksitas masalah yang dimodelkan.

Kesulitan menyelesaikan persamaan diferensial dapat diatasi dengan menggunakan metode numerik, salah satunya adalah metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta memberikan hasil ketelitian yang tinggi dan tidak memerlukan turunan fungsi. Persamaan pendulum misalnya, yang merupakan persamaan diferensial nonlinier orde dua, dapat diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan ketelitian yang tinggi [2].

Persamaan lain yang merupakan persamaan diferensial orde dua ialah persamaan rangkaian RLC. Rangkaian RLC banyak digunakan antara lain sebagai model yang sesuai untuk bagian-bagian jaringan komunikasi dan desain filter. Rangkaian-rangkaian RLC yang mempunyai konfigurasi sama tetapi memiliki harga elemen yang berbeda akan menghasilkan tanggapan yang berbeda. Hal ini membuat analisis rangkaian RLC menjadi sukar.

Untuk mempermudah analisis, dapat digunakan perhitungan berbasis komputer menggunakan metode Runge Kutta orde 4 [3]. Dengan cara ini, juga dapat diperoleh grafik waktu terhadap tanggapan alaminya. Dari data dan grafik tanggapan alami, dapat diketahui hubungan R dan α yang menentukan jenis redaman rangkaian karena jenis redaman akan berubah sesuai dengan perbandingan α dan ω_0.

Dalam penelitian yang dilakukan ini,juga diterapkan metode Runge-Kutta orde 4 dalam analisis rangkaian RLC. Tujuannya adalah untuk mengetahui tanggapan alami dari rangkaian RLC seri maupunrangkaian RLC paralel dengan nilai komponen yang bervariasi. Dengan bantuan program Matlab, dapat diketahui jenis tanggapan dan grafik tanggapannya dalam waktu yang singkat sehingga analisis menjadi lebih mudah.

II. LANDASAN TEORI

A. Metode Runge-Kutta Orde 4

Penyelesaian persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial dan juga memenuhi kondisi awal yang diberikan pada persamaan tersebut. Di dalam penyelesaian persamaan diferensial secara analitis, biasanya dicari penyelesaian umum yang mengandung konstanta sembarang dan kemudian mengevaluasi konstanta tersebut sedemikian sehingga hasilnya sesuai dengan kondisi awal.

Metode penyelesaian persamaan diferensial secara analitis terbatas pada persamaan-persamaan dengan bentuk tertentu dan biasanya hanya untuk menyelesaikan persamaan linier dengan koefisien konstan sedangkan metode penyelesaian numerik tidak ada batasan mengenai bentuk persamaan diferensial. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode numerik dilakukan pada titik-titik yang ditentukan secara berurutan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti maka jarak (interval) antara titik-titik yang berurutan tersebut dibuat semakin kecil.

Salah satu metode penyelesaian persamaan diferensial secara numerik ialah Metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta memberikan hasil ketelitian yang tinggi dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, \Delta x)\,\Delta x \qquad (1)$$

dengan Φ $(x_i, y_i, \Delta x)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval.

Metode Runge-Kutta orde 4 banyak digunakan karena mempunyai ketelitian lebih tinggi dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde yang lebih rendah. Metode ini mempunyai bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,\Delta x$$

(2)

dengan:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x,\ y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x)$$
$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x,\ y_i + \frac{1}{2}k_2\Delta x)$$
$$k_4 = f(x_i + \Delta x,\ y_i + k_3\Delta x)$$

B. Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Dua Secara Numerik

Asumsikan persamaan diferensial orde dua sebagai

$$y'' = g(x, y, y') \qquad (3)$$

dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$ dan $y^{'}(x_0) = v_0$.

Untuk menyelesaikannya, diperkenalkan variabel baru$v = y^{'}(x)$sehingga $v^{'} = y^{''}$, maka persamaan diferensial orde dua dapat ditulis sebagai pasangan persamaan diferensial orde satu, yaitu:

$$y^{'} = v \quad (4)$$
$$v^{'} = g(x, y, v') \quad (5)$$

dengan batasan kondisi awal $y(x_0) = y_0$ dan$v(x_0) = v_0$.

C. Rangkaian RLC

Tanggapan alami suatu rangkaian ditentukan seluruhnya oleh jenis elemen pasif di dalam rangkaian, oleh cara-cara bagaimana elemen rangkaian saling dihubungkan dan oleh syarat awal yang dihasilkan oleh energi yang disimpan [4]. Terdapat tiga jenis tanggapan alami rangkaian RLC yaitu:

1. Terlalu redam, terjadi jika frekuensi neper α lebih besar dari frekuensi resonan ω_0.
2. Redaman kritis, terjadi jika frekuensi neper α sama dengan frekuensi resonan ω_0.
3. Kurang redam, terjadi jika frekuensi neper α lebih kecil dari frekuensi resonan ω_0.

Jenis tanggapan alami rangkaian RLC tergantung dari nilai elemen resistor, induktor dan kapasitor di dalamnya.

D. Rangkaian Paralel Tanpa Sumber

Persamaan rangkaian RLC paralel tanpa sumber dapat dituliskan sebagai berikut :

$$v^{''} + \frac{1}{RC}v^{'} + \frac{1}{LC}v = 0 \quad (6)$$

dengan
v: tegangan yang melintasi rangkaian
R : nilai resistor dalam rangkaian
L : nilai induktor dalam rangkaian
C : nilai kapasitor dalam rangkaian

E. Rangkaian Seri Tanpa Sumber

Persamaan rangkaian RLC seri tanpa sumber dapat dituliskan sebagai berikut :

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0 \quad (7)$$

dengan i adalah arus yang mengalir dalam rangkaian.

III. METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan studi literatur mengenai metode Runge-Kutta orde 4 untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde dua, dilanjutkan dengan penyelesaian beberapa rangkaian RLC (seri dan paralel) tanpa sumber baik secara analitik maupun numerik untuk mengetahui tanggapan alaminya. Kemudian, dilakukan perancangan program dan uji coba program tersebut untuk beberapa rangkaian RLC sehingga dapat diketahui tanggapan alami dari masing-masing rangkaian.

IV. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Rangkaian RLC Paralel Tanpa Sumber

Berdasarkan persamaan (4), persamaan (5) dan persamaan (6), diperoleh persamaan

$$v^{'} = y = \frac{1}{C} * i$$

dan

$$y^{'} = -\frac{1}{RC}y - \frac{1}{LC}v$$

Dimisalkan nilai R = 6 Ω, L = 7 H dan C = 1/42 F serta diketahui nilai tegangan awal rangkaian v_0 = 0 dan arus awal induktor i_0 = 10 A [4]. Dapat diketahui bahwa jenis tanggapan alami rangkaian ini adalah terlalu redam karena nilai $\alpha = \frac{1}{2RC}$ lebih besar dari $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Gambar 1 memperlihatkan grafik tanggapan alami rangkaian RLC paralel ini.

Berdasarkan nilai-nilai di atas, maka

$$y_0 = v_0^{'} = \frac{1}{C}i_0 = 420\, V/s$$

sehingga dapat dibuat langkah penyelesaian menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 sebagai berikut (dengan h=0,1) :

1. untuk k=0

$$M_1 = y_0$$

$$L_1 = -\frac{1}{RC}y_0 - \frac{1}{LC}v_0$$

$$M_2 = y_0 + \frac{hL_1}{2}$$

$$L_2 = -\frac{1}{RC}\left(y_0 + \frac{hL_1}{2}\right) - \frac{1}{LC}\left(v_0 + \frac{hM_1}{2}\right)$$

$$M_3 = y_0 + \frac{hL_2}{2}$$

$$L_3 = -\frac{1}{RC}\left(y_0 + \frac{hL_2}{2}\right) - \frac{1}{LC}\left(v_0 + \frac{hM_2}{2}\right)$$

$$M_4 = y_0 + hL_3$$

$$L_4 = -\frac{1}{RC}(y_0 + hL_3) - \frac{1}{LC}(v_0 + hM_3)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$$

$$v_1 = v_0 + \frac{h}{6}[M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4]$$

2. untuk k = 1 dst, ulangi langkah a.

Dengan menuliskan persamaan-persamaan di atas dalam M-file program Matlab, maka dapat diperoleh nilai tegangan rangkaian (tanggapan alami) dalam rentang waktu tertentu.

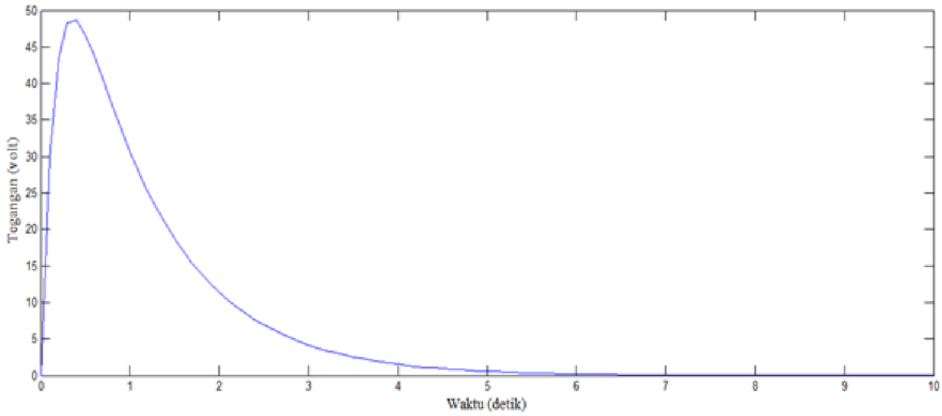
Penyelesaian eksak untuk tanggapan alami rangkaian RLC paralel di atas adalah

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \text{ volt}$$

Tabel 1 menunjukkan perbandingan nilai tanggapan alami $v(t)$yang dihitung dengan metode Runge-Kutta orde 4 terhadap penyelesaian eksaknya.Terlihat bahwa hasil penyelesaian menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 memiliki selisih (error) terbesar bernilai 0,0023 (0,23%) terhadap nilai penyelesaian eksaknya. Hal ini menunjukkan bahwa hasil penyelesaian menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 memiliki tingkat ketelitian yang tinggi.

Tabel 1. Tanggapan alami rangkaian RLC paralel

Waktu$t$	Tegangan$v(t)$ (volt)		Selisih
(detik)	Runge-Kutta Orde 4	Nilai eksak	(*error*)
0	0	0	0
1	30,6914	30,6937	-0,0023
2	11,3677	11,3676	0,0001
3	4,1821	4,1821	0
4	1,5385	1,5385	0
5	0,5660	0,5660	0
6	0,2082	0,2082	0
7	0,0766	0,0766	0
8	0,0282	0,0282	0
9	0,0104	0,0104	0
10	0,0038	0,0038	0



Gambar 1. Grafik tanggapan alami rangkaian RLC paralel

B. Rangkaian RLC Seri Tanpa Sumber

Berdasarkan persamaan (7), dituliskan dua persamaan diferensial orde satu sebagai berikut :

$$i' = y = \frac{v_L}{L}$$

dan

$$y' = -\frac{R}{L}y - \frac{1}{LC}i$$

Dimisalkan nilai R = 2kΩ, L = 1 H dan C = 1/401μF serta diketahui nilai arus awal rangkaian i_0 = 2mA dan tegangan awal kapasitor v_{C_0} = 2V [4]. Dapat diketahui bahwa jenis tanggapan alami rangkaian ini adalah kurang redam karena nilai $\alpha = \frac{R}{2L}$ lebih kecil dari $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Gambar 2 memperlihatkan grafik tanggapan alami rangkaian RLC seri ini.

Berdasarkan nilai-nilai di atas, maka :

$$y_0 = i_0' = \frac{v_{L_0}}{L} = \frac{v_{C_0} - Ri_0}{L} = -2A/s$$

sehingga dapat dibuat langkah penyelesaian menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 sebagai berikut (dengan h=0,00001) :

1. untuk k = 0

$$M_1 = y_0$$

$$L_1 = -\frac{R}{L}y_0 - \frac{1}{LC}i_0$$

$$M_2 = y_0 + \frac{hL_1}{2}$$

$$L_2 = -\frac{R}{L}\left(y_0 + \frac{hL_1}{2}\right) - \frac{1}{LC}\left(i_0 + \frac{hM_1}{2}\right)$$

$$M_3 = y_0 + \frac{hL_2}{2}$$

$$L_3 = -\frac{R}{L}\left(y_0 + \frac{hL_2}{2}\right) - \frac{1}{LC}\left(i_0 + \frac{hM_2}{2}\right)$$

$$M_4 = y_0 + hL_3$$

$$L_4 = -\frac{R}{L}(y_0 + hL_3) - \frac{1}{LC}(i_0 + hM_3)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$$

$$i_1 = i_0 + \frac{h}{6}[M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4]$$

2. untuk k = 1 dst, ulangi langkah a.

Dengan menuliskan persamaan-persamaan di atas dalam M-file program Matlab, maka dapat diperoleh nilai arus rangkaian (tanggapan alami) dalam rentang waktu tertentu.

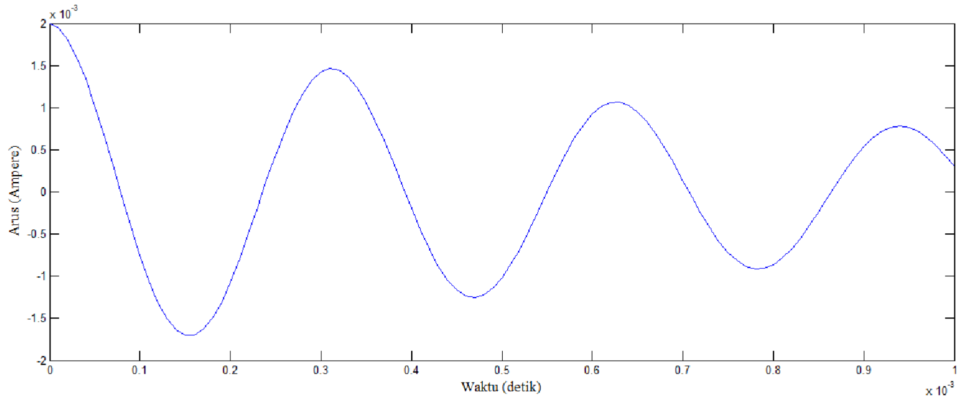
Penyelesaian eksak untuk tanggapan alami rangkaian RLC seri di atas adalah :

$$i(t) = 2e^{-1000t}\cos 20000t \text{ mA}$$

Tabel 2 menunjukkan perbandingan nilai tanggapan alami $i(t)$yang dihitung dengan metode Runge-Kutta orde 4 terhadap penyelesaian eksaknya. Terlihat bahwa hasil penyelesaian menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 memiliki nilai yang sama persis dengan nilai penyelesaian eksaknya (tidak ada selisih/*error*).

Tabel 2. Tanggapan alami rangkaian RLC seri

Waktu$t$	Arus $i(t)$ (mA)		Selisih
(ms)	Runge-Kutta Orde 4	Nilai eksak	(*error*)
0	2	2	0
0,1	-0,8	-0,8	0
0,2	-1,1	-1,1	0
0,3	1,4	1,4	0
0,4	-0,2	-0,2	0
0,5	-1	-1	0
0,6	0,9	0,9	0
0,7	0,1	0,1	0
0,8	-0,9	-0,9	0
0,9	0,5	0,5	0
1	0,3	0,3	0



Gambar 2. Grafik tanggapan alami rangkaian RLC seri

V. PENUTUP

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa metode Runge-Kutta orde 4 dapat diterapkan dalam analisis rangkaian RLC paralel tanpa sumber maupun rangkaian RLC seri tanpa sumber.

Dengan menuliskan langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dalam program Matlab, dapat diketahui jenis dan grafik tanggapan alami dari rangkaian-rangkaian tersebut di atas dalam waktu yang singkat sehingga analisis menjadi lebih mudah.

Metode Runge-Kutta orde 4 memberikan hasil ketelitian yang tinggi. Hal ini dibuktikan dengan selisih hasil penyelesaian dengan metode Runge-Kutta orde 4 terhadap nilai eksaknya yang sangat kecil yaitu sama dengan atau lebih kecil dari 0,0023 (0,23%) untuk rangkaian RLC paralel yang dibahas dan nol untuk rangkaian RLC seri yang dibahas.

REFERENSI

[1] Subakti, I., 2006, “Metode Numerik”, Teknik Informatika Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya

[2] Utami, R. P., 2005, “Metode Runge-Kutta untuk Solusi Persamaan Pendulum”, Prodi Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.

[3] Murjannah, W.S.S., Prihanto, A., 2013, “Implementasi Rangkaian RLC dengan Metode Runge-Kutta Orde 4”, Jurnal Inovasi Fisika Indonesia Universitas Negeri Surabaya.

[4] Hayt, W. H., dkk., 2006, “Rangkaian Listrik”, jilid 1 edisi 4, Penerbit Erlangga, Jakarta.